SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1994-95

Angelo Favini

PROBLEMI PARABOLICI DEGENERI E REGOLARITÀ DELLE LORO SOLUZIONI

11 maggio 1995

Tecnoprint - Bologna 1995

Riassunto. Utilizzando metodi per la trattazione di equazioni differenziali in spazi di Banach, vengono descritti alcuni risultati di esistenza e di regolaritá (nel tempo) relativi ad equazioni paraboliche degeneri del tipo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha(x)\Delta u + f.$$

Queste affermazioni possono vedersi come teoremi di perturbazione moltiplicativa di generatori di semigruppi analitici.

Abstract. By using methods from differential equations in Banach spaces, some existence and regularity (in time) results relative to degenerate parabolic equations of the type

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha(x)\Delta u + f.$$

are described.
The affirmations could be viewed as theorems on multiplicative perturbation of generators of analytic semigroups.

1. Introduzione e risultati preliminari.

Nel lavoro di Favini e Yagi [FY1] é stata studiata la risolubilitá in senso classico del problema astratto in uno spazio di Banach complesso X

(1.1) $\frac{d}{dt}(Mu(t)) + Lu(t) = f(t), \quad 0 < t \leq T,$

(1.2) $Mu(0) = v_0 \in X,$

dove L e M sono due operatori lineari chiusi da X in sé, con dominio $D(L) \subseteq D(M)$, soddisfacenti

(1.3) *Il risolvente* $(zM + L)^{-1} \in L(X)$ *esiste per ogni* $z \in \Sigma_\alpha : \Re ez \geq -c(1 + |\Im mz|)^\alpha$, *con* $C > 0$,

(1.4) $\|M(zM + L)^{-1}\|_{L(X)} \leq C(1 + |z|)^{-\beta}, z \in \Sigma_\alpha, 0 < \beta \leq \alpha \leq 1,$

dove $L(X)$ denota lo spazio degli operatori lineari limitati da X in se stesso. Soluzione classica di (1.1), (1.2) significa che la funzione u soddisfa $Lu \in C((0,T];X), Mu \in C^1((0,T];X)$, con il significato ovvio degli ultimi spazi indicati, vale (1.1) e la condizione iniziale (1.2) é intesa in un senso debole, precisamente,

$$\|ML^{-1}(Mu(t) - v_0)\|_X \longrightarrow 0 \text{ per } t \to 0+.$$

Vale infatti (vedi [FY1])

Teorema 1. *Sia* $0 < \beta \leq \alpha \leq 1, 2\alpha + \beta > 2$.
Allora per ogni $f \in C^\sigma([0,T];X), \sigma \in (\frac{2-\alpha-\beta}{\alpha}, 1)$, *e ogni* $v_0 \in X$, *il problema* (1.1),(1.2) *ha una unica soluzione classica.*

Abbiamo denotato con $C^\sigma([0,T];X)$ lo spazio delle funzioni hölderiane da $[0,T]$ in X, con esponente $\sigma \in (0,1)$.
Nello stesso lavoro si mostra che per mezzo del **Teorema 1** si puó trattare il problema parabolico degenere

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial}{\partial t}(m(x)u) = \Delta u + f(t,x), \quad t \in (0,T], x \in \Omega, \\ &u(t,x) = 0, \quad t \in (0,T], x \in \partial\Omega, \\ &m(x)u(t,x) \longrightarrow v_0(x) \quad \text{per} \quad t \to 0+, \end{aligned}$$

dove Ω é un aperto limitato di $\mathrm{R}^n, n \geq 1$, con frontiera regolare $\partial\Omega$, nell'ipotesi $m(\cdot) \in C(\overline{\Omega}), m(x) \geq 0$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$, prendendo o $X = H^{-1}(\Omega)$ (e allora $\alpha = \beta = 1$), oppure $X = L^2(\Omega)$ (e allora $\alpha = 1, \beta = 1/2$).
Si noti che in entrambi i casi l'operatore M, di moltiplicazione per $m(x)$, é limitato da X in X.
In effetti, il **Teorema 1** consente di risolvere problemi non banali in cui M é non limitato, come mostra il seguente esempio.

Esempio 1. Limitiamoci a ragionare in dimensione 1, prendendo come X lo spazio hilbertiano $L^2(0,1)$. Sia M l'operatore da X in se stesso definito da

$$D(M) = H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1), \quad Mu = u - u", \quad u \in D(M).$$

L é definito da

$$D(L) = H_0^2(0,1) \cap H^4(0,1), \quad Lu = D^4 u = u^{(4)}, \quad u \in D(L).$$

Poiché dobbiamo stabilire stime del tipo (1.4), consideriamo

$$(1.5) \qquad zMu + Lu = f \in X, \quad z \text{ complesso}, \quad u \in D(L).$$

Prendendo il prodotto interno di entrambi i membri di (1.5) per $u \in X$, si ha, denotando per brevitá $\|\cdot\|_X$ con $\|\cdot\|$:

$$(1.6) \qquad z(\|u\|^2 + \|u'\|^2) + \|u"\|^2 = \int_{(0,1)} f\overline{u}dx.$$

Prendendo nella (1.6) la parte reale e la parte immaginaria e supponendo $\Re e\, z > 0$, si ottiene facilmente

$$|z| \; \|u\| \leq 2\|f\|,$$

$$|z| \; \|u'\| \leq C\|f\|,$$

e anche

$$\|u"\| \leq \|f\| \; \|u\| \leq \tfrac{2}{|z|} \; \|f\|^2;$$

dunque

$$\|Mu\| \leq \|u\| + \|u"\| \leq C|z|^{-1/2}\|f\|$$

per ogni numero complesso z con parte reale grande. Ma é facile vedere che in effetti

$$\|Mu\| \leq C(1+|z|)^{-1/2}\|(zM+L)u\|, \; u \in D(L).$$

Ora, é ben noto (vedi, per esempio, Triebel [T,p.321]) che

$$D(L^{1/2}) \subseteq D(M)$$

e, d'altra parte (Weidmann, [W,p.109]), proprio in forza di questa relazione,

$$(zM+L)^* = \overline{z}M + L.$$

Segue che $zM + L$ ha inverso limitato per ogni z con parte reale grande e

$$(1.7) \qquad \|M(zM+L)^{-1}\|_{L(X)} \leq C(1+|z|)^{-1/2}.$$

Rivedendo con attenzione il procedimento di dimostrazione, si riconosce che in effetti la (1.7) é vera per ogni $z \in \Sigma_1 \equiv \Sigma$. Di qui la (1.5) ha una unica

soluzione per ogni $f \in X$ e ogni $z \in \Sigma$; in questo modo (1.3), (1.4) sono vere con $\alpha = 1, \beta = 1/2$.
Naturalmente, scelte diverse dello spazio X possono portare alla stima ottimale $\alpha = \beta = 1$ in (1.4), come si pu vedere nel lavoro di Greenlee [G], per esempio, ma nello spazio $L^2(0,1)$ questa é la stima ottimale.
Facciamo anche notare che qui l'operatore L *non* é il quadrato dell'operatore di derivata seconda che compare nella definizione di M.
Le ipotesi del **Teorema 1** non garantiscono, in generale, né che la soluzione di (1.1), (1.2) sia *stretta* , cioé $Lu \in C([0,T];X), Mu \in C^1([0,T];X)$ e

$$\frac{d}{dt}(Mu) + Lu = f(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.8}$$

$$(Mu)(0) = Mu_0, \tag{1.9}$$

né, a maggior ragione, che Lu abbia una regolaritá di tipo C^ω nel tempo, con $0 < \omega \le \theta$.
Nella monografia di Favini e Yagi [FY2], in preparazione, é provato il seguente risultato.

Teorema 2. *Valgano* (1.3), (1.4), $0 < \beta \le \alpha \le 1$, $2\alpha + \beta > 2$.
Se $\frac{2-\alpha-\beta}{\alpha} < \theta < 1$, *allora per ogni* $f \in C^\theta([0,T];X), u_0 \in D(L)$, *soddisfacenti la condizione di compatibilitá*

$$f(0) - Lu_0 = Mz_0,$$

con $z_0 \in D(L)$, *allora* (1.8), (1.9) *ha una unica soluzione stretta* u *con la regolaritá massimale* $Lu \in C^\omega([0,T];X)$, *dove* $\omega = \alpha\theta + \alpha + \beta - 2$.

Non ci soffermiamo sulla dimostrazione del **Teorema 2** . Qui il nostro scopo sará di mostrare che esso (e naturalmente, anche il **Teorema 1**) permette di trattare equazioni paraboliche degeneri del tipo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha(x)\Delta u, \quad T > 0, \ x \in \Omega,$$

dove $\alpha(x)$ si annulla su $\partial\Omega$, provando in effetti risultati tipo perturbazione moltiplicativa di generatori di semigruppi analitici.

2. Equazioni paraboliche degeneri.

Sia X uno spazio di Hilbert complesso con norma $\|\cdot\|$ e prodotto interno $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$.
Sia M un operatore autoaggiunto positivo da X in se stesso, con dominio $D(M)$ denso in X.
Sia poi L un altro operatore definito positivo in X, con $D(L)$ denso in X e tale che

(2.1) $\qquad D(L^{1/2}) \subseteq D(M^{1+s}),$

dove s é un numero positivo.
Il nostro primo risultato consiste nel seguente

Teorema 3. *Nelle ipotesi precedenti, se vale* (2.1), *allora* (1.3), (1.4) *sono soddisfatte con* $\alpha = 1, \beta = s/(1+2s)$.

Dimostrazione. Sia z un numero complesso e sia $u \in D(L)$, con $zMu + Lu = f \in X$. Poiché

(2.2) $\qquad \Re e\ z\ \|M^{1/2}u\|^2 + \|L^{1/2}u\|^2 = \Re e\ \langle f, u\rangle,$

(2.3) $\qquad \Im m\ z\ \|M^{1/2}u\|^2 = \Im m\ \langle f, u\rangle,$

dopo aver preso il valore assoluto nella (2.3) e aver sommato l'uguaglianza ottenuta a (2.2), si ottiene

$$(\Re e\ z + |\Im m\ z|)\|M^{1/2}u\|^2 + \|L^{1/2}u\|^2 = \Re e\langle f, u\rangle + |\Im m\langle f, u\rangle|.$$

Pertanto, poiché $\|M^{1/2}u\| \leq C_1\|L^{1/2}u\|$, dove $C_1 > 0$, per ogni $u \in D(L^{1/2})$, deduciamo che

$$\begin{aligned}(\Re e\ z + |\Im m\ z| + \tfrac{1}{2C_1^2})\|M^{1/2}u\|^2 + \tfrac{1}{2}\|L^{1/2}u\|^2 \leq \\ \leq \Re e\langle f, u\rangle + |\Im m\langle f, u\rangle|.\end{aligned}$$

Prendiamo $\Re e\ z + |\Im m\ z| + \frac{1}{2C_1^2} \geq \epsilon_0 > 0$, dove $\epsilon_0 < (2C_1^2)^{-1}$.
Allora la stima precedente implica che per tali z vale

(2.4) $\qquad \|L^{1/2}u\| \leq C\|(zM + L)u\|,$

per una opportuna costante positiva C.
Utilizzando nuovamente (2.2) e ((2.3) si ottiene

$$(|\Re e\ z| + |\Im m\ z|) \quad \|M^{1/2}u\|^2 \leq C_2\|(zM + L)u\|^2,$$

$$\|u\| \leq C_3\|(zM + L)u\|,$$

dove $C_2, C_3 > 0$.
Cosí $zM + L$ é iniettivo e ha immagine densa.
Sfruttiamo adesso l'assunzione (2.1). Si ha

$$\|Mu\| \leq C\|M^{1+s}u\| \leq C'\|L^{1/2}u\| \leq C"\|Lu\|^{1/2}\|u\|^{1/2}$$

per ogni $u \in D(L)$.
Di qui, M é L-limitato secondo Kato [K] con L-confine uguale a 0. Poiché ció é banalmente vero per gli operatori aggiunti di L e M, il **Teorema 5.27** in Weidmann [W,p.109] implica che $(zM + L)^* = \overline{z}M + L$.
Ma allora la stima precedente e (2.4) implicano che $zM + L$ ha immagine densa in X. Segue che $(zM + L)^{-1} \in L(X)$ e

$$\|M^{1/2}(zM + L)^{-1}f\| \leq C(1 + |z|)^{-1/2})\|f\|, \quad f \in X, z \in \Sigma,$$

$$\|M^{1+s}(zM+L)^{-1}f\| \leq C\|L^{1/2}(zM+L)^{-1}f\| \leq C'\|f\|, f \in X, z \in \Sigma.$$

La disuguaglianza dei momenti ci porta allora a

$$\|M(zM + L)^{-1}f\| \leq C(1 + |z|)^{-\frac{s}{1+2s}}\|f\|$$

per ogni $f \in X, z \in \Sigma$.
Il teorema risulta in tal modo provato.

Il **Teorema 2**, applicato nella presente situazione, dá allora

Teorema 4. *Valgano le assunzioni precedenti, con* (2.1).
Se $\frac{1+s}{1+2s} < \theta < 1$, $f \in C^\theta([0,T];X)$, $v_0 \in D(LM^{-1}) = M(D(L))$, $v_0 = Mu_0, u_0 \in D(L), f(0) - Lu_0 = Mz_0$,*con* $z_0 \in D(L)$, *allora il problema di Cauchy*

$$v'(t) = -LM^{-1}v(t) + f(t), 0 \leq t \leq T,$$

$$v(0) = v_0$$

ha una unica soluzione stretta v *con la regolaritá*

$$t \longrightarrow v'(t) \in C^\omega([0,T];X),$$

dove $\omega = \theta - \frac{1+s}{1+2s}$.

Si noti che in base a Favini e Yagi [FY1], $-LM^{-1}$ genera un semigruppo infinitamente differenziabile in X.
Vediamo adesso come il **Teorema 4** possa tradursi in alcuni risultati su esistenza e regolaritá delle soluzioni di problemi di Cauchy-Dirichlet per equazioni paraboliche degeneri.

Esempio 2. Sia $\alpha = \alpha(x)$ una funzione misurabile limitata da $\overline{\Omega}$ in R, dove Ω é un aperto limitato di R^n, $n \geq 1$, con frontiera $\partial\Omega$ regolare (puó bastare che Ω abbia la proprietá del cono), con

$$\alpha(x) > 0 \quad \text{per ogni } x \in \Omega,$$

$$\alpha(x) = 0 \quad \text{per ogni } x \in \Gamma \subseteq \partial\Omega.$$

Sia $X = L^2(\Omega)$ ed M denoti l'operatore di moltiplicazione per $\frac{1}{\alpha(x)}$ nello spazio X. Se $s > 0$, poniamo $\beta(x) = \alpha(x)^{1+s}$.
Allora la disuguaglianza di Hölder dá

$$\int_\Omega \frac{|u(x)|^2}{\beta(x)^2}\, dx \leq \left(\int_\Omega |u(x)|^{\frac{2q}{q-1}} dx\right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_\Omega \frac{dx}{\beta(x)^{2q}}\right)^{1/q}, \tag{2.5}$$

dove $q > 1$. Assumiamo

$$\int_\Omega \beta(x)^{-2q} dx < \infty.$$

Come operatore L prendiamo, per semplicitá, $L = -\Delta$, con
$D(L) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, cosicché

$$\|L^{1/2}u\|^2 = \int_\Omega |grad\ u|^2 dx, \quad u \in D(L^{1/2}) = H_0^1(\Omega).$$

Richiamiamo che il Teorema di immersione di Sobolev dá (vedi Adams [A,p.97])

$$H^1(\Omega) \subseteq L^p(\Omega), \quad 2 \leq p \leq \frac{2n}{n-2}, \quad \text{se } n > 2,$$

$$H^1(\Omega) \subseteq L^p(\Omega), \quad 2 \leq p < \infty, \quad \text{se } n = 2,$$

$$H^1(\Omega) \subseteq C(\overline{\Omega}), \quad \text{se } n = 1.$$

Noi analizzeremo separatamente i tre casi corrispondenti.

Caso $n > 2$. Prendendo $p = \frac{2q}{q-1}$, deduciamo che se $2q \geq n$, allora

$$\left(\int_\Omega |u|^{\frac{2q}{q-1}} dx\right)^{\frac{q-1}{2q}} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

In altri termini, se

$$\int_\Omega \frac{dx}{\alpha(x)^k} < \infty,$$

dove $2 < k < n$, allora $D(L^{1/2}) \subseteq D(M^{1+s})$, con $s = \frac{n-k}{n}$.

Caso $n = 2$. Allora $\frac{2q}{q-1} \geq 2$ é vera per ogni $q > 1$ e quindi

$$\int_\Omega \frac{dx}{\alpha(x)^k} < \infty,$$

con $k > 2$, implica nuovamente che $D(L^{1/2}) \subseteq D(M^{1+s})$, prendendo per esempio $s = \frac{k-2}{k+2}$.

Caso $n = 1$. Il Teorema di Sobolev darebbe la condizione

$$\int_\Omega \frac{dx}{\alpha(x)^k} < \infty,$$

per un $k > 2$, $s = \frac{k-2}{2}$, ma questa puó essere sostituita da un'altra, decisamente piú debole, a causa della peculiaritá di $n = 1$. Infatti, se

$$\Omega = (a, b), -\infty < a < b < \infty,$$

e $u \in H_0^1(a, b)$, allora

$$\int_{(a,b)} \frac{|u(x)|^2}{\beta(x)^2} dx = \int_{(a,\frac{a+b}{2})} \alpha(x)^{-2(1+s)} |\int_a^x u'(t)dt|^2 dx +$$

$$+ \int_{(\frac{a+b}{2},b)} \alpha(x)^{-2(1+s)} |\int_x^b u'(t)dt|^2 dx \leq$$

$$\leq (\int_{(a,\frac{a+b}{2})} (x-a)\alpha(x)^{-2(1+s)} dx + \int_{(\frac{a+b}{2},b)} (b-x)\alpha(x)^{-2(1+s)} dx) \cdot \|u\|^2_{H_0^1}.$$

Quindi, se esiste un $s > 0$ tale che

$$\int_{(a,\frac{a+b}{2})} (x-a)\alpha(x)^{-2(1+s)} dx < \infty, \tag{2.6}$$

$$\int_{(\frac{a+b}{2},b)} (b-x)\alpha(x)^{-2(1+s)} dx < \infty, \tag{2.7}$$

il **Teorema 4** puó essere applicato.
In particolare, se $\Omega = (0, 1)$ e

$$\alpha(x) = x^r(1-x)^\sigma, \ 0 \leq x \leq 1,$$

dove $r, \sigma > 0$, allora la condizione $r, \sigma < 1$ assicura che (2.6) e (2.7) sono verificate scegliendo un qualunque $s \in (0, min\{\frac{1}{r}, \frac{1}{\sigma}\} - 1)$.
Pertanto, si é mostrato che in ogni caso il **Teorema 4** permette di risolvere (dando anche regolaritá massimale della soluzione) il problema

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta(\alpha v) + f(t, x), \quad 0 \leq t \leq T, x \in \Omega,$$

$$(\alpha v)(t, x) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, x \in \partial\Omega,$$

$$v(0, x) = v_0(x), \quad x \in \Omega,$$

purché $f \in C^\theta([0, T]; L^2(\Omega))$, con θ opportuno nell'intervallo $(0, 1)$.
D'altra parte, se denotiamo αv con u, riconosciamo che tale u risolve in senso stretto il problema parabolico degenere

$$(2.8) \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \alpha(x)\Delta u(t,x) + g(t,x), & 0 \le t \le T, x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, \quad 0 \le t \le T, x \in \partial\Omega, \\ \|u(t,\cdot) - u_0\|_{L^2_{1/\alpha}} \longrightarrow 0 \quad \text{per } t \to 0+, \end{cases}$$

dove $L^2_{1/\alpha}(\Omega)$ é lo spazio di Sobolev con peso la cui norma é data da

$$\|u\|^2_{L^2_{1/\alpha}} = \int_\Omega \alpha(x)^{-2}|u(x)|^2 dx.$$

Precisamente, si ha

Teorema 5. *Sia* $\frac{1+s}{1+2s} < \theta < 1$, *dove* s *é determinato come sopra.*
Se $g \in C^\theta([0,T]; L^2_{1/\alpha}(\Omega)), g(0,\cdot) + \alpha(\cdot)\Delta u_0(\cdot) \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$,
$u_0 \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, *allora* (2.8) *ha una unica soluzione stretta* u *avente la regolaritá*

$$t \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot), t \longrightarrow \alpha(\cdot)\Delta u(t,\cdot) \in C^\omega([0,T]; L^2_{1/\alpha}(\Omega)),$$

dove $\omega = \theta - \frac{1+s}{1+2s}$.

Osserviamo esplicitamente che quando $\alpha(\cdot)$ é piú "liscia" di quanto abbiamo supposto in (2.6), (2.7), nel senso che $\alpha \in C^\infty([a,b])$,

$$\int_{(a,b)} \alpha(x)^{-1} dx = \infty,$$

la situazione cambia radicalmente, dando luogo ad interessantissime questioni, legate a problemi fisici, biologici e probabilistici, in particolare a equazioni senza condizioni ai limiti oppure con condizioni di tipo Ventcel.
Ma allora altri metodi dovranno essere applicati.

Bibliografia

[A] R.A.Adams, *Sobolev spaces* , Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975.

[FY1] A.Favini e A.Yagi , *Multivalued linear operators and degenerate evolution equations* ,Annali Mat.Pura Appl.,(IV), 163(1993),353-384

[FY2] A.Favini e A.Yagi , *Degenerate differential equations in Banach spaces* , in preparazione.

[G] W.M.Greenlee , *Rate of convergence in singular perturbations,* Ann.Inst.Fourier 18(1968), 135-191.

[K] T.Kato, *Perturbation theory for linear operators* , Springer, Heidelberg,1966.

[T] H.Triebel , *Interpolation theory, function spaces, differential operators,* North Holland, Amsterdam, 1978.

[W] J.Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen* , B.G.Teubner, Stuttgart, 1976.